SOOCHOW UNIVERSITY

Chap7 Discrete Probability

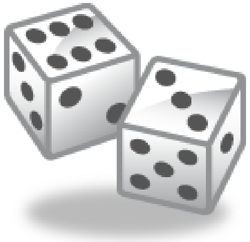
Jin-Hui Wu

2026-04-10

大纲

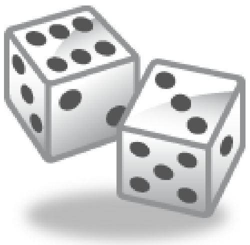
- ❑ 古典概率 (7.1)
- ❑ 概率论
- ❑ 贝叶斯定理
- ❑ 均值与方差

古典概率



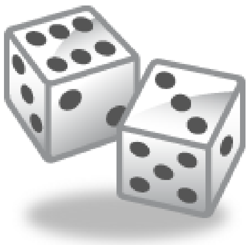
- 古典概率 (classical probability)
  - 投一枚色子
  - 有6种（有限）等概率的可能结果 {1,2,3,4,5,6}
    - 课本称为有限概率 (finite probability)
  - 得到偶数的概率为 $|\{2,4,6\}|/|\{1,2,3,4,5,6\}| = 1/2$

古典概率



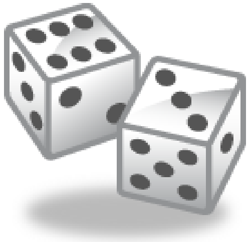
- 古典概率 (classical probability)
  - 试验 (experiment)：产生一种可能结果的过程
    - 投一枚色子

古典概率



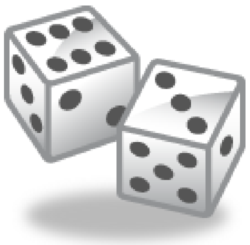
- 古典概率 (classical probability)
  - 试验 (experiment)：产生一种可能结果的过程
    - 投一枚色子
  - 样本空间 (sample space)：可能结果的集合S
    - 有6种（有限）等概率的可能结果 $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

古典概率



- 古典概率 (classical probability)
  - 试验 (experiment)：产生一种可能结果的过程
    - 投一枚色子
  - 样本空间 (sample space)：可能结果的集合S
    - 有6种（有限）等概率的可能结果 S = {1,2,3,4,5,6}
  - 事件 (event)：样本空间的子集E
    - 得到偶数结果：E = {2,4,6}

古典概率



- 古典概率 (classical probability)
  - 试验 (experiment)：产生一种可能结果的过程
    - 投一枚色子
  - 样本空间 (sample space)：可能结果的集合S
    - 有6种（有限）等概率的可能结果 S = {1,2,3,4,5,6}
  - 事件 (event)：样本空间的子集E
    - 得到偶数结果：E = {2,4,6}
  - 概率 (probability)
    - S有限且等概率，E的概率为$p(E)=\frac{|E|}{|S|}\in[0,1]$

例

- 缸里有4个蓝球和5个红球，从缸里取出一个蓝球的概率是____

- 掷两个骰子使得其点数之和等于7的概率是____

- 从一副52张牌的牌堆中取2张牌，点数相同的概率为____

补集的概率

- E是一个事件，则其补集 (complements) 的概率为

$$p(\bar{E}) = 1 - p(E)$$

- 例
  - 随机生成一个10位的比特串，其中至少1位是0的概率是_____

并集的概率

- E_1和E_2是两个事件，则其并集 (union) 的概率为
  $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$

- 例
  - 从不超过100的正整数中随机选出一个正整数，它能被2或5整除的概率是_____

三门问题

- 3扇门后有一扇是大奖
  - 你从3扇门中选一扇门，不打开
  - 主持人在剩余两扇门中选一扇没有奖的门打开
  - 你可以选择是否愿意换另外一扇门

大纲

- ❑ 古典概率
- ❑ 概率论 (7.2)
- ❑ 贝叶斯定理
- ❑ 均值与方差

概率指派

- 概率指派 (probability assignment)
  - S是可数的样本空间，每个结果s赋予一个概率$p(s)$，满足
    - $0 \le p(s) \le 1, \forall s \in S$
    - $\sum_{s \in S} p(s) = 1$

概率指派

- 概率指派 (probability assignment)
  - S是可数的样本空间，每个结果s赋予一个概率$p(s)$，满足
    - $0 \leq p(s) \leq 1 , \forall s \in S$
    - $\sum_{s \in S} p(s) = 1$
  - 概率p是一个函数，称作概率分布 (probability distribution)
  - 均匀分布 (uniform distribution)
    - 所有结果概率相等，即古典概率

概率指派

- 概率指派 (probability assignment)
  - S是可数的样本空间，每个结果s赋予一个概率$p(s)$，满足
    - $0 \le p(s) \le 1, \forall s \in S$
    - $\sum_{s \in S} p(s) = 1$
  - 概率p是一个函数，称作概率分布 (probability distribution)
  - 事件E的概率为$\sum_{s \in E} p(s)$

例

- 一个不均匀的骰子出现3的概率是其他数字的两倍，则出现奇数点的概率是_____

条件概率

- 条件概率 (conditional probability)
  - 例
    - 抛三次硬币，三次均为正面的概率为____
    - 已知第一次为正面，则三次均为正面的概率为____

条件概率

- 条件概率 (conditional probability)
  - 例
    - 抛三次硬币，三次均为正面的概率为____
    - 已知第一次为正面，则三次均为正面的概率为____
  - E和F两事件且$p(F) > 0$，给定F的条件下E的条件概率记作$P(E|F)$，定义为

$$p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}$$

例

- 随机生成4位比特串以使得16个比特串都是等可能的，那么在给定串的第一位是0的条件下，串中至少含有两个连续0的概率是_____

例

- 在至少已有1个男孩的条件下，一个家庭中两个孩子均是男孩的条件概率是____
  - 假定BB、BG、GB和GG是等可能的

独立性

- 独立性 (independence)
  - 例
    - 抛三次硬币，第二次为正面的概率为____
    - 已知第一次是正面，第二次是正面的概率为____

独立性

- 独立性 (independence)
  - 例
    - 抛三次硬币，第二次为正面的概率为____
    - 已知第一次是正面，第二次是正面的概率为____
  - 事件E和F是独立的，当且仅当

$$p(E) = p(E|F)$$

上式等价于

$$p(E \cap F) = p(E)p(F)$$

例

- 判断E和F是否独立：
  - E：随机产生以1开头的4位比特串
  - F：随机产生包含偶数个0的4位比特串

- 事件E和F是独立的，当且仅当

$$p(E) = p(E|F)$$

上式等价于

$$p(E \cap F) = p(E)p(F)$$

例

- 判断E和F是否独立：
  - E：有两个孩子的家庭有两个女孩
  - F：有两个孩子的家庭至少有一个女孩

- 事件E和F是独立的，当且仅当

$$p(E) = p(E|F)$$

上式等价于

$$p(E \cap F) = p(E)p(F)$$

两两独立、相互独立

- 两两独立 (pairwise independence)
  - 事件$E_1, E_2, \dots, E_n$是两两独立的，当且仅当E_i与E_j独立对任意$1 \leq i < j \leq n$成立

两两独立、相互独立

- 两两独立 (pairwise independence)
  - 事件$E_1, E_2, \dots, E_n$是两两独立的，当且仅当E_i与E_j独立对任意$1 \leq i < j \leq n$成立

- 相互独立 (mutual independence)
  - 事件$E_1, E_2, \dots, E_n$是两两独立的，当且仅当
    $$p\left(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_m}\right) = p\left(E_{i_1}\right) \dots p\left(E_{i_m}\right)$$
    对任意$m \geq 2$和$1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$成立

例

- 正四面体的四个面分别涂为红色、黄色、蓝色、红黄蓝三色，随机掷一次，定义三个事件：
  - A：底面有红色
  - B：底面有黄色
  - C：底面有蓝色
- 这三个事件是否两两独立、相互独立？

伯努利试验

- 伯努利试验 (Bernoulli trial)
  - 每次执行一项具有两种可能结果的试验就叫作一次伯努利试验
  - 例
    - 一枚硬币正面朝上的概率是2/3，假定每次掷硬币是独立的，当掷7次硬币时恰好4次正面朝上的概率是_____

伯努利试验

- 伯努利试验 (Bernoulli trial)
  - 每次执行一项具有两种可能结果的试验就叫作一次伯努利试验
  - 设伯努利试验成功概率为p，则n次独立的伯努利试验中有k次成功的概率为

$$C(n,k)p^k(1-p)^{n-k}$$

随机变量

- 随机变量 (random variable)
  - 例
    - 抛3次硬币，t是其结果，$X(t)$是正面朝上的次数

随机变量

- 随机变量 (random variable)
  - 例
    - 抛3次硬币，t是其结果，$X(t)$是正面朝上的次数
  - 一个随机变量是从样本空间到实数集的函数，即一个随机变量对每个可能的结果指派一个实数值
  - 随机变量是函数，不是变量，也不随机

随机变量

- 分布 (distribution)
  - 例
    - 抛3次硬币，t是其结果，$X(t)$是正面朝上的次数

随机变量

- 分布 (distribution)
  - 例
    - 抛3次硬币，t是其结果，$X(t)$是正面朝上的次数
  - 一个随机变量X在样本空间S中的分布是所有的有序对$\left(r, p(X = r)\right)$，其中，$r \in X(S)$

例：生日问题

- 要求房间中至少2个人有相同生日的概率大于1/2，那么所需的最少人数是_____

大纲

- ❑ 古典概率
- ❑ 概率论
- ❑ 贝叶斯定理 (7.3)
- ❑ 均值与方差

例

- 盒子A中有2个绿球和7个红球，盒子B中有4个绿球和3个红球。Bob随机选取了一个盒子，并在该盒子中选取了一个球。如果Bob选中的是一个红球，那么该球来自于盒子A的概率是_____

贝叶斯定理

- 贝叶斯定理 (Bayes' Theorem)
  - E和F是两个事件，且$p(E)$和$p(F)$均非零，则

$$p(F|E) = \frac{p(E|F)p(F)}{p(E|F)p(F) + p(E|\overline{F})p(\overline{F})}$$

例

- 设100 000人中仅一人得病A。得病A时，诊断正确率是99%；没得病A时，诊断正确率是99. 5%，则：
  - 某人诊断呈阳性时，得此病的概率为____
  - 某人疾病诊断呈阴性时，没得此病的概率为____

$$p(F|E)=\frac{p(E|F)p(F)}{p(E|F)p(F)+p(E|\overline{F})p(\overline{F})}$$

贝叶斯定理

- 贝叶斯定理 (Bayes' Theorem)
  - E和F是两个事件，且$p(E)$和$p(F)$均非零，则

$$p(F|E) = \frac{p(E|F)p(F)}{p(E|F)p(F) + p(E|\overline{F})p(\overline{F})}$$

  - 广义贝叶斯定理 (generalized Bayes' Theorem)
    - 所有F_j互斥，且并为全集

$$p(F_j|E) = \frac{p(E|F_j)p(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} p(E|F_i)p(F_i)}.$$

大纲

- 古典概率
- 概率论
- 贝叶斯定理
- 均值与方差 (7.4)

期望

- 期望 (expectation)
  - 随机变量$X(s)$在样本空间S的期望值等于
    $$E(X)=\sum_{s\in S}p(s)X(s)$$
  - 也称作均值 (mean)

例

- 设X是掷一个骰子时出现的点数，X的期望是___

例

- 设X是掷一个骰子时出现的点数，X的期望是___

- X是抛3次硬币时正面朝上的次数，则X的期望是____

例

- 设X是掷一个骰子时出现的点数，X的期望是___
- X是抛3次硬币时正面朝上的次数，则X的期望是____
- 掷两个骰子出现的点数和的期望是____

期望的线性性

- 期望的线性性 (linearity of expectation)
  - $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$
  - $E(aX + b) = aE(X) + b$

例

- 掷两个骰子出现的点数和的期望是____

例

- 掷两个骰子出现的点数和的期望是_____

- 一寄存员为n个人寄存帽子，他忘记在帽子上放寄存号。顾客取帽子时，寄存员随机选取留下的帽子交给他们，则被正确返回的帽子数期望是_____

例

- 掷两个骰子出现的点数和的期望是____

- 一寄存员为n个人寄存帽子，他忘记在帽子上放寄存号。顾客取帽子时，寄存员随机选取留下的帽子交给他们，则被正确返回的帽子数期望是____

- 在前n个正整数的排列中，若$i < j$且j排在i前边，就称(i, j)为一个逆序。则前n个数的随机排列中逆序数期望为____

例

- 计算插入排序的平均时间复杂度

procedure *insertion sort* $(a_1,\ldots,a_n$: reals with $n \geq 2)$
    for $j := 2$ to n
        $i := 1$
        while $a_j > a_i$
            $i := i + 1$
        $m := a_j$
        for $k := 0$ to $j - i - 1$
            $a_{j-k} := a_{j-k-1}$
        $a_i := m$
{Now $a_1,\ldots,a_n$ is in increasing order}

方差

- 方差 (variance)
  - 样本空间S上随机变量X的方差为
    $$V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = E(X^2) - E(X)^2$$
  - 标准差$\sigma(X) = \sqrt{V(x)}$

例

- 一个伯努利试验以概率p成功，则其方差为____

例

- 一个伯努利试验以概率p成功，则其方差为_____

- 掷一个骰子出现的点数的方差为_____

例

- 一个伯努利试验以概率p成功，则其方差为____
- 掷一个骰子出现的点数的方差为____
- 几何分布 (geometric distribution) 满足

$$p(X=k)=p(1-p)^{k-1}\quad(k\in\mathbb{N}^{+})$$

  - 则X的均值为____，方差为____
  - $p(X=k)$等于第k次伯努利试验是首次成功的概率
  - $E(X)$是成功所需的平均次数

独立随机变量

- 独立随机变量 (independent random variable)
  - 随机变量X和Y是独立的，若$\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$，有$p(X = r_1 \wedge Y = r_2) = p(X = r_1)p(Y = r_2)$
  - 例
    - X为第一个色子点数，Y为第二个色子点数
    - X为第一个色子点数，Y为两个色子点数和

独立随机变量

- 独立随机变量 (independent random variable)
  - 随机变量X和Y是独立的，若$\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$，有 $p(X = r_1 \wedge Y = r_2) = p(X = r_1)p(Y = r_2)$
  - 若X和Y独立，则

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

切比雪夫不等式

- 切比雪夫不等式 (Chebyshev's inequality)
  - 随机变量X均值和方差存在时，满足

$$p(|X - E(X)| \geq r) \leq \frac{V(X)}{r^2}$$

切比雪夫不等式

- 切比雪夫不等式 (Chebyshev's inequality)
  - 随机变量X均值和方差存在时，满足

$$p(|X - E(X)| \geq r) \leq \frac{V(X)}{r^2}$$

  - 例
    - X是掷n次硬币时正面超声的次数，$r = \sqrt{n}$

总结

- 古典概率的基本概念与计算
  - 试验、样本空间、事件、概率

- 概率论
  - 概率分布
  - 条件概率、独立事件的判断
  - 贝叶斯定理
  - 期望、方差